UNIVERSIDAD DE LONDRES – PREPARATORIA

GUÍA DE MATEMÁTICAS VI- ÁREA I

Plan: 96 **Clave materia: 1600** **Clave UNAM: 1244**

Unidad 1. Conceptos esenciales de las funciones

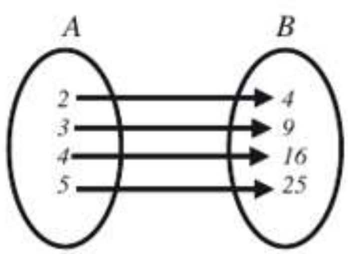
Objetivo:

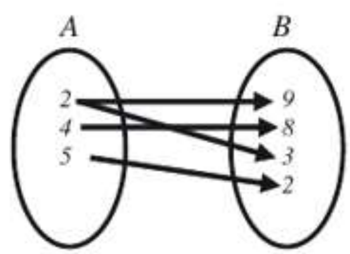
El alumno:

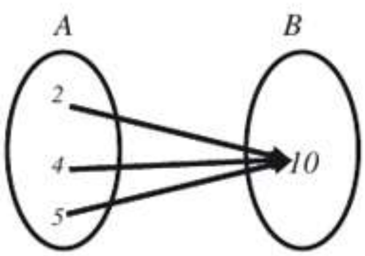
● Desarrollará habilidades de visualización, generalización, análisis y síntesis al integrar las ideas relacionadas con el concepto de función desde un enfoque gráfico y mediante un planteamiento formal, para establecer las bases de lo que será el eje conductor del curso.

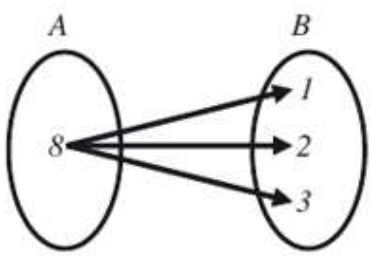
● Profundizará en las características particulares de las funciones al modelar diversos fenómenos o situaciones para reconocer su importancia como instrumentos de representación matemática.

1. Determina si los siguientes diagramas representan una función o una relación.

1.


2.


3.


4.


2. Identifica si los siguientes conjuntos representan funciones o relaciones.

1. $\{(0, 3), (2, 3), (-1, 3)\ldots\}$
2. $\{(-3, 5), (3, 5), (-3, 2)\ldots\}$
3. $\{(4, 7), (-4, \sqrt{3}), (\sqrt{2}, 5)\ldots\}$
4. $\{(2, 5), (\sqrt{4}, 2), (3, -3)\ldots\}$
5. $\{(a, 2a), (-2a, 3a), (4a, a)\ldots\}$
6. $\left\{\left(\frac{3}{2}, 1\right), \left(\frac{6}{4}, -1\right), \left(1, \frac{5}{2}\right)\ldots\right\}$

3. Determina el dominio y el rango de las siguientes funciones;

1 $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

2 $f(x)=\sqrt{16-x^2}$

3 $f(x)=\sqrt{36-x^2}$

4 $f(x)=\sqrt{6x+3}$

5 $f(x)=\sqrt{x-3}$

4. Indica si f es par, impar, o ninguna, además de obtener su gráfica.

1. $f(x) = x^2 - x$
2. $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8$
3. $f(x) = x^3$
4. $f(x) = -x^2 + 2x - 4$
5. $f(x) = (x - 2)^3$
6. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$
7. $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$
8. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

5. Indica cuál de las siguientes funciones es inyectiva, suprayectivas o biyectiva.

1) $f(x)=5x$
2) $f(x)=2x^2+6x-3$
3) $f(x)=6$
4) $f(x)=4x+5$
5) $f(x)=3x^2$
6) $f(x)=\sqrt{x+6}$

6. Para las siguientes funciones determina las siguientes composiciones:

$f \circ g, g \circ f, f \circ f, g \circ g$

1) $f(x) = x^5 + 5$ 1) $g(x) = 6 - 2x$

2) $f(x) = 4x^2 - 2x + 1$ 2) $g(x) = 3x + 4$

3) $f(x) = 2x^3 + 3$ 3) $g(x) = x - 1$

7. Determina la función inversa (si es posible) de las siguientes funciones:

1. $f(x) = x$
2. $f(x) = 2x - 5$
3. $f(x) = x^2 - 9, x \in [0, \infty)$
4. $f(x) = x^2 + 3x + 2$
5. $f(x) = x^3$

8. Resuelve el siguiente problema de aplicación de funciones:

Una persona tiene una pared de piedra en un costado de un terreno. Dispone de 1 600 m de material para cercar y desea hacer un corral rectangular utilizando el muro como uno de sus lados. Expresa el área del corral en términos del ancho de éste.

Solución

Sean x y y las dimensiones del corral donde,

x: ancho del corral, y: largo del corral

Entonces,

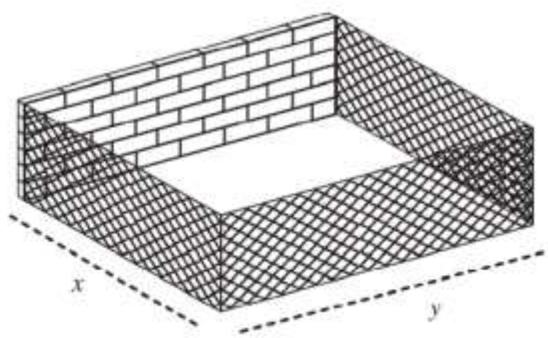
$$2x + y = 1\,600 \rightarrow y = 1\,600 - 2x$$

el área del rectángulo está dada por:

$$A = xy$$

Al sustituir $y = 1\,600 - 2x$, se obtiene:

$$A(x) = x(1\,600 - 2x) = 1\,600x - 2x^2$$



Unidad 2. Límites de una función para analizar su comportamiento

Objetivos específicos

El alumno:

● Comprenderá la noción de límite a través del análisis de procesos infinitos para establecer las bases que le permitirán estudiar los conceptos de derivada e integral.

● Desarrollará habilidades para visualizar la gráfica de una función y analizar su comportamiento al obtener sus límites en diferentes formas: gráfica, numérica y algebraica para describirla a detalle.

9. Determina el valor de los siguientes límites por evaluación.

1. $\lim\limits_{x\to 2}(7-2x)$

2. $\lim\limits_{x\to 3}\left(4x^2-2x-6\right)$

3. $\lim\limits_{x\to -4}(6-3x)$

4. $\lim\limits_{z\to -1}\dfrac{4z+3}{2z+1}$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}+4}{x+5}$

10. Determina el valor de los siguientes límites usando factorización.

1 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}=$

2 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}=$

3 $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{-4t-\sqrt{3t+16t^4}}{4t-2t^2}$

4 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=$

5 $\lim\limits_{x\to \frac{3}{4}}\dfrac{x^2-9}{x+2}=$

6 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-6+8x}{x-\sqrt{9x^2-5x}}$

11. Determina el valor de los siguientes límites de funciones trigonométricas.

1 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\dfrac{4\cos x}{\operatorname{sen} x+\cos x}}$

2 $\lim\limits_{h\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\tan h}{\operatorname{sen}^2 h-1}$

3 $\lim\limits_{w\to \pi}\dfrac{\sec^2 w}{1-\operatorname{sen}^2 w}$

4 $\lim\limits_{\beta\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\operatorname{sen}\beta-\cos\beta}{\tan\beta-\sqrt{3}}$

Unidad 3. La derivada de una función para modelar el cambio Objetivo específico

El alumno:

● Desarrollará habilidades para visualizar, analizar, generalizar y sintetizar el cambio a través del estudio de los conceptos básicos del Cálculo Diferencial, que le permitirán describir analíticamente el comportamiento de las funciones y sus cambios para aplicarlos en la modelación de problemas que se presentan en diferentes disciplinas.

12. Deriva las siguientes funciones, utiliza las fórmulas.

1. $f(x) = \frac{2}{\sqrt[4]{x^5}} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^{-1}}$
2. $f(x) = \frac{7}{x^{-2}} + \frac{5}{x^{-3}}$
3. $f(x) = \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x} - 2x$
4. $f(x) = \frac{3x^2 + 5x + 8}{\sqrt[3]{x}}$
5. $y = \sqrt{x^{-1}}\left(\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}\right)$
6. $y = (3x-4)^5$
7. $y = (2-4x)^3$
8. $y = (3x^6 - 2x^4)^4$

13. Deriva las siguientes funciones, utiliza las fórmulas.

1. $y = \operatorname{sen} 8x$
2. $f(x) = \cos 3x^2$
3. $f(x) = \tan x^3$

14. Obtén la derivada de las siguientes funciones logarítmicas y exponenciales:

1. $f(x) = \ln(3x^2 - 5x + 2)$
2. $f(x) = \ln\sqrt{x}$
3. $y = e^{\sqrt{3x^2-1}}$
4. $f(x) = e^{4x}$

15. Obtén las derivadas de las siguientes funciones implícitas

1 . $3x^2 + 2xy - 6y^2 = 1$

2 . $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$

3 . $\dfrac{x+y}{x-y} = x$

16. Obtén las derivadas sucesivas de las siguientes funciones:

1. Determina $\dfrac{d^4y}{dx^4}$, si $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 5x + 2$
2. Obtén $\dfrac{d^3y}{dx^3}$, si $y = 4x^2 - 6x + 2$
3. Determina $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, si $y = \dfrac{4x-1}{5x+3}$

17. Determina la ecuación de las rectas tangente y normal a la curva en el punto indicado:

1 . $y = x^3 - x^2$ en el punto $(2, 4)$

2 . $y = x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 5x - 9$ en el punto $(-1, -4)$

3 . $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ en el punto $\left(\sqrt{5}, 2\right)$

18. Resuelve los siguientes problemas:

1. La posición de una partícula se expresa mediante la función $s(t) = 2t^3 - 5t^2 + 10t$, con s en metros y t en segundos.

Determina la velocidad y la aceleración en $t = 1, \dfrac{3}{2}, 0$ segundos.

2. La distancia recorrida por un automóvil sobre una carretera en el instante t está dada por $s(t) = 9t^4 - 120t^3 + 432t^2$

Obtén la velocidad y la aceleración en $t = 2, \dfrac{7}{5}, 3$ segundos.

19. Dadas las siguientes funciones, determina los puntos máximos y mínimos, intervalos de concavidad y convexidad, intervalos donde la función crece y decrece.

1. $f(x) = x^2 - 6x + 10$

2. $f(x) = -x^2 + 4x + 6$

3. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

20. Resolver los siguientes problemas de aplicación de la derivada.

a) Pepe quiere utilizar 100 metros de malla metálica para cercar un jardín rectangular. Determine el área máxima posible del jardín.

b) De cada esquina de una pieza cuadrada de una hoja de metal de 10 cm de lado, quite un pequeño cuadrado de x cm de lado y de la vuelta a los bordes, de manera que se forme una caja abierta, ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la caja para obtener el volumen máximo?

c) La viruela de cierta bacteria se mide en una escala de 0 a 50 y viene expresada por la función $V(t) = 40 + 15t - 9t^2 + t^3$ donde t es el tiempo (en horas) transcurrido desde que comenzó el estudio (t=0). Indicar los instantes de máxima y mínima virulencia en las 6 primeras horas y los intervalos en que crece y decrece.

Unidad 4. La integral de una función para medir.

Objetivo específico

El alumno:

● Desarrollará habilidades para visualizar, analizar y conjeturar la medida a través del estudio de los conceptos básicos del Cálculo Integral a fin de aplicarlos en la obtención de áreas de figuras curvas, volúmenes de cuerpos con formas irregulares y longitudes de curvas vinculados con fenómenos de diversas disciplinas.

21. Realiza las siguientes sumas:

1. $\sum_{i=1}^{4} i^4$

2. $\sum_{i=2}^{6} (4 - 3i)$

3. $\sum_{i=1}^{5} \left(\frac{2-i}{4}\right)$

22. Emplea sumas superiores para encontrar el área limitada por la curva, el eje X, las rectas dadas o el intervalo indicado.

1. $f(x) = 4x + 5; x = 2, x = 5$

2. $f(x) = -2x + 6; x = 1, x = 4$

3. $f(x) = 4 - x^2; [-2, 2]$

23. Determinar el valor de los datos a_6, a_{11} y a_{28} para las siguientes sucesiones:

- -17, -13, -9, …
- 11, 10.4, 9.8, …
- 1.2, 2.4, 4.8, ….

24. Encontrar el valor de la serie: S7, S13, S20 para las siguientes sucesiones:

- -11, -14, -17, …
- 55, -44, 35.2, …
- 10, 14, 19,6, …

25. Realizar las siguientes integrales:

1. $\int x \ln x^2 dx =$

2. $\int 5sen(7-3x)\, dx$

3. $\int 2x(5x^2+6)^4 dx =$

4. $\int \frac{5x^2}{(1-x^3)} dx =$

5. $\int \left(\frac{3}{\sqrt[5]{x^2}} - \frac{2}{\sqrt[5]{x}} \right) dx$

6. $\int_0^1 (7-x)dx =$

7. $\int_0^1 2x^2(3x^3+1)dx =$

8. $\int_1^2 (1+x)^2 dx =$

9. $\int 2x \cdot sen(x^2-4)dx =$

10. $\int e^{ax+b} dx$

26. Resolver los siguientes problemas de aplicación de la integral.

- Calcula el área entre -2 y 0 de la función $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$
- Obtener la integral de -6 → -4 para la curva cuyo vértice se encuentra en $(-2, 2)$ y su directriz en x = -2.
- Encontrar la integral definida de la función $4y - 2x^3 - 7 = 3$ en el intervalo $(1, 4)$.
- Hallar el área limitada por la función $y = e^x$, y las rectas x = 1 y x = 4.
- Calcular la distancia recorrida, si la velocidad de un tren bala en un intervalo [0,11] está definida por:

  $V = t^3$ [0, 3]
  $V = t$ [4,11]